15/12/2017

Μάθημα 19ο (ΑΣΚΗΣΕΙΣ)

Διαφ. Εξισ.

→ για γραμμ. Εξισ.
→ το χρησιμοποιώ αυτούσια

Πρόταση

Ας είναι y_i, $i=1,\dots,k$ (μερικές) λύσεις των εξισώσεων
$L(y)=b_i \quad (i=1,\dots,k)$

Τότε η συνάρτηση $y=y_1+\dots+y_k$ είναι μια μερική λύση της εξίσωσης $L(y)=b$

απόδειξη

Είναι $L(y)=L(y_1+\dots+y_k)=L(y_1)+\dots+L(y_k)=b_1+\dots+b_k$

* $L(y)=xe^x+\cos x$

Σπάω σε κομμάτια

$L(y)=xe^x \rightarrow y_1^{\mu}$, $L(y)=\cos x \rightarrow y_2^{\mu}$

άρα $y^{\mu}=y_1^{\mu}+y_2^{\mu}$

Άσκηση 4, σελ 113

ιγ) Να λυθεί το ΠΑΤ

(E_2) $y''+y=3x^2-4\sin x$
$y(0)=0$, $y'(0)=1$

Μη ομογενής γραμμ. Δ.Ε 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Θεωρώ την αντίστοιχη ομογενή σταθερών συντ.

$(E_0)_2$: $y''+y=0$

Παίρνω το χαρακτ. πολυώνυμο

$p(\lambda)=\lambda^2+1$

$p(\lambda)=0 \Rightarrow \lambda^2+1$

ρίζες $\lambda_1=i$, $\lambda_2=-i$

Λυσεις : $y_1(x)=\cos x$, $y_2(x)=\sin x$

Συνεπως μια γενικη λυση ειναι της μορφης

$\tilde{y}(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$, $x\in\mathbb{R}$

c_1, c_2 αυθ. σταθ.

Συμφωνα με την προταση μπορω να σπασω το $b(x)$ σε δυο αλλες εξισωσεις

(E_1) $y''+y=3x^2$

(E_2) $y''+y=-4\sin x$

→ προϋποθεση απλα να γνωριζω μια ΒΣΛ

αγνωστων σταθ ή μεταβολης σταθερων;

↳ προϋποθεση το $b(x)$ ειδικης μορφης

• $e^{(\sigma+\tau i)x}=e^{\sigma x}(\cos\tau x+i\sin\tau x)$ θυμαμαι

Θα χρησιμοποιησω τη μεθοδο αγνωστων σταθερων

$y_{\mu_1}(x)=ax^2+\beta x+\gamma$

$y'_{\mu_1}(x)=2ax+\beta$

$y''_{\mu_1}(x)=2a$

Αντικαθιστω στην (E_1)

$2a+ax^2+\beta x+\gamma=3x^2 \Rightarrow ax^2+\beta x+(2a+\gamma)=3x^2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a=3 \\ \beta=0 \\ 2a+\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ \beta=0 \\ \gamma=-6 \end{cases}$$

Αρα $y_{\mu_1}(x)=3x^2-6$, $x\in\mathbb{R}$

για την (E_2) θα ορίσω άλλη Δ.Ε

$$y'' + y = -4e^{xi} \quad (E_2')$$

Θέτω $y = z e^{xi}$

$$y' = e^{xi}(z' + iz)$$

$$y'' = e^{xi}(z'' + 2iz' - z)$$

αντικαθιστώ στην (E_2)

$$z'' + 2iz' - \cancel{z} + \cancel{z} = -4 \Rightarrow z'' + 2iz' = -4$$

Θεωρώ $z'_{\mu}(x) = a$

$$z''_{\mu}(x) = 0$$

άρα έχω

$$2ia = -4 \Rightarrow ia = -2 \Rightarrow a = 2i \quad \text{οπότε } z'_{\mu}(x) = 2i$$

άρα $z_{\mu}(x) = 2xi$

$$y_{\mu_2}(x) = 2ie^{xi}x = 2i(\cos x + i\sin x)x$$

$$y_{\mu_2}(x) = Im(y_{\mu_2}(x))$$

Η λύση της αρχικής Δ.Ε είναι

$$y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + 3x^2 - 6 + 2x\cos x$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 + 0 + 0 - 6 + 0 = 0 \Rightarrow C_1 = 6$$

$$y'(x) = -C_1\sin x + C_2\cos x + 6x + 2\cos x - 2x\sin x$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow C_2 + 2 = 1 \Rightarrow C_2 = -1$$

Οπότε

$$y(x) = 6\cos x - \sin x + 3x^2 - 6 + 2x\cos x$$

Scanned by CamScanner

Άσκηση 8, σελίδα 114

i) (E_2) : $5x^2y'' - 3xy' + 3y = x^{\frac{1}{2}}$, $x>0$

Είναι μη ομογενής γραμμ. Δ.Ε με μη σταθερούς συντελεστές

Είναι μια Διαφ. Εξίσωση Euler

Θυμάμαι

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{x^{n-1}} + \dots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

- μετασχηματισμός : $t = \log x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$ $(x = e^t)$

κανόνας αλυσίδας

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) =$$

$$= -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x} \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2} \frac{d^2y}{dt^2}$$

Άρα έχω

$$-5 \frac{dy}{dt} + 5 \frac{d^2y}{dt^2} - 3 \frac{dy}{dt} + 3y = e^{t/2} \quad (E')$$

Είναι με σταθερούς συντελεστές

Παίρνω χαρακτ. πολυώνυμο

$p(\lambda) = 5\lambda^2 - 8\lambda + 3$

$p(\lambda) = 0 \Rightarrow 5\lambda^2 + 8\lambda + 3 = 0$

ρίζες: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3/5$

Λύσεις: $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = e^{3/5 \cdot t}$

οπότε μια λύση είναι της μορφής: (της (E_0'))

$\tilde{y}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{\frac{3}{5}t}$, $t \in \mathbb{R}$

$\tilde{y}(x) = c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^{3/5}$, $x>0$

Θέτουμε $y = z e^{\frac{t}{2}}$

$y' = \left(z' + \frac{z}{2}\right) e^{t/2}$

$y'' = \left(z'' + z' + \frac{1}{4} z\right) e^{t/2}$

αντικαθιστώντας στην (E')

$5z'' + 5z' + \frac{5}{4} z - 8z' - 4z + 3z = 1 \quad \Rightarrow$

$5z'' - 3z' + \frac{1}{4} z = 1$

η λύση θα είναι της μορφής

$z_\mu(t) = a$

$z_\mu(t) = 4$

μερική λύση της (E')

$y_\mu(t) = 4 e^{t/2}$

$y_\mu(x) = 4\sqrt{x} \quad , \quad x > 0$

Συνεπώς η γενική λύση της αρχικής μη ομ της (E) είναι:

$y(x) = c_1 \cdot x + c_2 x^{3/5} + 4\sqrt{x} \quad , \quad x > 0$

Scanned by CamScanner

Άσκηση 3-29

$$\sum_{k=0}^{5} y^{(k)} = 0 \qquad (E)$$

Παίρνω χαρακτηριστικό πολυων.

$p(\lambda) = \lambda^5+\lambda^4+\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1$

γνωρίζω ότι ισχύει $\sum a\omega^{n-1} = \dfrac{a\omega^{k-1}\omega - a}{\omega-1}$

τότε έχω $p(\lambda) = \sum_{i=0}^{5} \lambda^i = \dfrac{\lambda^6-1}{\lambda-1} = \dfrac{(\lambda^3-1)(\lambda^3+1)}{\lambda-1} =$

$= \dfrac{\cancel{(\lambda-1)}(\lambda^2+\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1)}{\cancel{(\lambda-1)}} = (\lambda^2+\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1)$

$p(\lambda)=0 \iff \lambda^2+1+\lambda=0$ ή $\lambda+1=0$ ή $\lambda^2-\lambda+1=0$

ρίζες $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$ $\quad \lambda=-1 \quad$ $\lambda_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Λύσεις

$y_1(x) = e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \quad x \in \mathbb{R}$

$y_2(x) = e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \quad x \in \mathbb{R}$

$y_3(x) = e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$

$y_4(x) = e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \quad x \in \mathbb{R}$

$y_5(x) = e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \quad x \in \mathbb{R}$

οι οποίες αποτελούν ένα ΘΣΛ της (E)

Έστω L ο χώρος όλων των λύσεων της (E) και L_0 ο χώρος των λύσεων της (E) με $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$

Παρατηρούμε ότι $y_1, y_2, y_3 \in L_0$ αλλά $y_4, y_5 \notin L_0$

$0 \in L_0$ (μηδενική συν.)

Έστω τώρα $\hat{y}, \hat{\hat{y}} \in L_0$ δηλ $\lim_{x\to\infty} \hat{y}(x) = \lim_{x\to\infty} \hat{\hat{y}}(x) = 0$

Πρέπει νδο $\lim_{x\to\infty} (c_1 \hat{y}(x) + c_2 \hat{\hat{y}}(x)) = c_1 \lim_{x\to\infty} \hat{y}(x) + c_2 \lim_{x\to\infty} \hat{\hat{y}}(x) =$

$= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0$

άρα $c_1 \hat{y}(x) + c_2 \hat{\hat{y}}(x) \in L_0$

οπότε L_0 γρ. υπόχωρος του $L \Rightarrow L_0$ γραμμ. χώρος

Θα δείξω ότι y_1, y_2, y_3 Γ.Α

$c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 = 0$

$c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + 0 \cdot y_4 \pm 0 \cdot y_5 = 0$, $y_1, \dots, y_5$ Γ.Α άρα

$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ και έτσι y_1, y_2, y_3 Γ.Α

Οδο οι y_1, y_2, y_3 παράγουν το L_0 δηλ γράφεται ως γραμμ. συνδ.

- Έστω $y \in L_0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} y(x) = 0$

Επίσης $y \in L_0 \Rightarrow y \in L \Rightarrow y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_4 + c_4 y_4 + c_5 y_5$

Για να ισχύουν αυτά λοιπόν υποχρεωτικά πρέπει $c_4 = c_5 = 0$

οπότε $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$ δηλ y_1, y_2, y_3 παράγουν το χώρο

και μια βάση μπορεί να είναι η εξής $\{y_1, y_2, y_3\}$

Άσκηση 3-43 (Λύσεις)

(*) $y'' - 2by' + cy = 0$

αν ισχύουν $y(0) = y(1) = 0$ τότε ισχύει $y(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Έχω μια ομογ. γραμμ Δ.Ε με σταθερούς συντελεστές

παίρνω χαρακτ. πολυων.

$p(\lambda) = \lambda^2 - 2b\lambda + c$

$\Delta = 4(b^2 - c)$

Διακρίνω περιπτώσεις

1) Έστω $b^2 > c \Rightarrow b^2 - c > 0$

Άρα $\Delta > 0$ οπότε πραγματικές λύσεις

$\lambda_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2-c}$ ρίζες

Λύσεις : $y_1(x) = e^{(b+\sqrt{b^2-c})x}$

$y_2(x) = e^{(b-\sqrt{b^2-c})x}$

οι οποίες αποτελούν ΘΣΛ

Λύση γενική

$y(x) = c_1 e^{(b+\sqrt{b^2-c})x} + c_2 e^{(b-\sqrt{b^2-c})x}$, $x \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{lll} y(0)=0 & \Rightarrow & c_1 + c_2 = 0 \\ y(1)=0 & \Rightarrow & c_1 e^{(b+\sqrt{b^2-c})} + c_2 e^{(b-\sqrt{b^2-c})} = 0 \end{array}\right\} (\Sigma)$$

$\det(\Sigma) = e^{b-\sqrt{b^2-c}} - e^{b+\sqrt{b^2-c}} > 0$

Οπότε $y(x) = 0 \quad \forall \ x \in \mathbb{R}$

2) $b^2 = c$ άρα $\Delta = 0$ δηλ. μια διπλή ρίζα

ρίζες $\lambda_{1,2} = b$ (διπλή)

Λύσεις : $y_1(x) = e^{b}$, $y_2(x) = xe^{b}$

μια γενική λύση είναι της μορφής

$y(x) = c_1 e^{bx} + c_2 x e^{bx}$

$y(0)=0 \Rightarrow c_1 + 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$y(1)=0 \Rightarrow c_1 e^{b} + c_2 e^{b} = 0 \Rightarrow c_2 e^{b} = 0 \xRightarrow{e^b \neq 0} c_2 = 0$

Scanned by CamScanner

οπότε η λύση μας είναι η μηδενική δηλ $y(x)=0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) $b^2 < c$ άρα $\Delta < 0$ οπότε μιγαδικές ρίζες

ρίζες $\lambda_{1,2} = b \pm i\sqrt{c-b^2}$

λύσεις $y_1(x) = e^{bx}\cos(\sqrt{c-b^2}\,x)$

$y_2(x) = e^{bx}\sin(\sqrt{c-b^2}\,x)$

μια λύση θα είναι της μορφής

$y(x) = c_1 e^{bx}\cos(\sqrt{c-b^2}\,x) + c_2 e^{bx}\sin(\sqrt{c-b^2}\,x)$

$y(0)=0 \Rightarrow c_1 e^{bx} = 0 \overset{e^b\neq 0}{\Longrightarrow} c_1 = 0$

$y(1)=0 \Rightarrow c_2 e^{bx}\sin(\sqrt{c-b^2}) = 0$

i) $c_2 = 0$ άρα $y(x)=0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $c_2 \neq 0$ άρα αναγκαστικά $\sin(\sqrt{c-b^2}) = 0 = \sin 0 \Rightarrow$

$\sqrt{c-b^2} = k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$

άρα $y(x) = c_2 e^{bx}\sin(k\pi x)$

για $n \in \mathbb{Z}$ έχω: $y(n) = c_2 e^{bn}\sin(k\pi n)$

$\lambda = k\cdot n \in \mathbb{Z}$ άρα $y(n) = c_2 e^{bn}\sin(\lambda n) = 0 \Rightarrow y(n) = 0$

Άσκηση 1

(Εξ): $y^{(4)} + y = 0$

χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $p(\lambda) = \lambda^4 + 1 = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 2\lambda^2 =$

$= (\lambda^2+1)^2 - (\sqrt{2}\lambda)^2 = (\lambda^2+1-\sqrt{2}\lambda)(\lambda^2+1+\sqrt{2}\lambda)$

$p(\lambda)=0 \Rightarrow \lambda^2 - \sqrt{2}\lambda + 1 = 0$ ή $\lambda^2 + \sqrt{2}\lambda + 1 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \lambda_{3,4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Scanned by CamScanner

Άρα η γενική λύση είναι

$$y(x) = c_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + c_2 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + c_3 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) +$$

$$+ c_4 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

$c_1, \dots, c_4$ αυθ. σταθ.